

AKADEMIET FOR DE TEKNISKE VIDENSKABER

GEOTEKNISK INSTITUT

THE DANISH GEOTECHNICAL INSTITUTE

BULLETIN No. 9

BENT HANSEN

PLASTICITETSTEORIENS ANVENDELSE

I GEOTEKNIKKEN

THE THEORY OF PLASTICITY
APPLIED TO SOIL MECHANICS

COPENHAGEN 1960

AKADEMIET FOR DE TEKNISKE VIDENSKABER

GEOTEKNISK INSTITUT

THE DANISH GEOTECHNICAL INSTITUTE

BULLETIN No. 9

BENT HANSEN

PLASTICITETSTEORIENS ANVENDELSE

I GEOTEKNIKKEN

THE THEORY OF PLASTICITY

APPLIED TO SOIL MECHANICS

SÆRTRYK ☆ „INGENIØREN” NR. 24 ☆ 15. DECEMBER 1960

P. HANSENS BOGTRYKKERI — KØBENHAVN

Plasticitetsteoriens anvendelse i geoteknikken

af Bent Hansen, civilingeniør,
Geoteknisk Institut

529.214:624.131

Plasticitetsteoriens anvendelse i geoteknikken diskuteres, idet der især lægges vægt på de praktiske vanskeligheder.

Disse skyldes bl. a. at jord normalt er et materiale med særdeles komplicerede egenskaber, der kun med tilnærmelse kan beskrives ved grundligninger, der er så simple, at beregningsarbejdet bliver praktisk gennemførligt.

En anden årsag er den, at man i jordmasser ikke kan opnå de klare statiske forhold, man har i bygningskonstruktioner. Plasticitetsteorien skal altså anvendes på kontinuerte medier, ofte endog med lagdeling, hvilket yderligere vanskeliggør beregningsarbejdet.

Disse vanskeligheder kan overvindes ved en hensigtsmæssig forsøgstechnik og ved anvendelse af egnede tilnærmelsesmetoder, og allerede nu udgør plasticitetsteorien et effektivt (og ofte det eneste) middel til at løse geotekniske problemer.

Indledning.

Som bekendt beskæftiger plasticitetsteorien sig under simplificerede forudsætninger med forholdene på brudstadiet. Dens anvendelse på et bestemt teknisk problem er derfor betinget af, om følgende spørgsmål kan besvares tilfredsstillende:

1. om det i det hele taget er relevant for det pågældende problem at betragte forholdene på brudstadiet.
2. om de materialer, der bringes til brud, har sådanne deformationsegenskaber ved brud, at der kan opstilles simplificerede forudsætninger, så plasticitetsteorien kan anvendes.
3. hvorledes de indgående konstanter bestemmes, hvor store de er i det givne tilfælde, og med hvilken nøjagtighed de er kendt.
4. hvorledes problemet løses under de gjorte forudsætninger, og hvad løsningen er.

Det er en selvfølge, at disse spørgsmål kan rejses, og også at de skal kunne besvares af den ingeniør, der i et givet problem foreslår beregningerne gennemført efter plasticitetsteorien. Det er måske mindre kendt, hvor store problemer der er forbundet med at nå frem til de rigtige svar. Dette vil blive belyst nærmere i denne artikel, særlig med henblik på geoteknikken, hvor plasticitetsteorien måske er mest kompliceret, og hvor den ofte udgør den eneste mulighed for med en rimelig arbejdsindsats at løse et givet problem.

Brudstadiet.

Det primære formål med enhver dimensioneringsberegning kan formuleres derhen, at man søger at bestemme de mest økonomiske dimensioner, som sikrer at konstruktionen ikke kan blive uarbejdsdygtig under de (forudseelige) påvirkninger, den kan blive udsat for. Det skal ikke her diskuteres, hvor stor sikkerheden skal være, eller hvorledes den

rent praktisk skal indføres i beregningerne, men det skal blot konstateres, at dette formål i hvert fald også medfører at man skal have en rimelig sikkerhed for, at konstruktionen ikke kommer i brudtilstand under disse påvirkninger.

For at opnå dette kan man i praksis enten regne i brugstilstanden med de virkelige påvirkninger og materialstyrker eller i brudtilstanden med nominelle påvirkninger og materialstyrker. I første tilfælde bestemmer man, normalt ud fra elasticitetsteoriens tilnærmede forudsætninger, de virkeligt optrædende spændinger og deformationer, og sikrer sig, at de maksimalt når op på visse tilladelige værdier. I sidste tilfælde regner man med nominelle påvirkninger (forhøjede) og materialstyrker (nedsatte) og sikrer sig, at konstruktionen netop er i brudtilstand under disse forudsætninger. Plasticitetsteorien beskæftiger sig med beregningen af sådanne brudtilstande.

For statisk bestemte konstruktioner er de to metoder identiske, men ved statisk ubestemte konstruktioner, hvortil hører alle konstruktioner, hvori der indgår plader, skiver, jordmasser og andre kontinuerte medier, er der en meget væsentlig forskel, idet det i reglen er langt lettere at udføre beregningerne efter elasticitetsteorien end efter plasticitetsteorien.

Ved den kontinuertlige bjælke i fig. 1 a, der for simpelhed skyld antages at have samme tværsnit over hele længden, må man således først ved hjælp af elasticitetsteorien opstille to ligninger til bestemmelse af de to overtallige (f. eks. M_1 og M_2), før de mulige maksimalmomenter kan beregnes og bjælken dimensioneres.

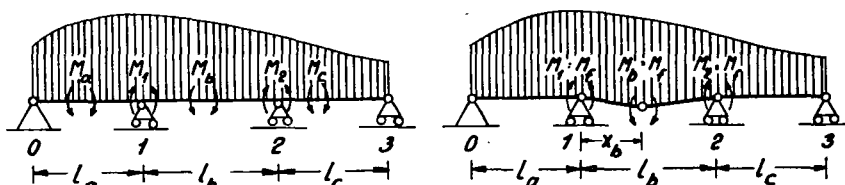


Fig. 1. Beregning af kontinuertlig bjælke. Fig. 1a: Efter elasticitetsteorien. Fig. 1b: Efter plasticitetsteorien.

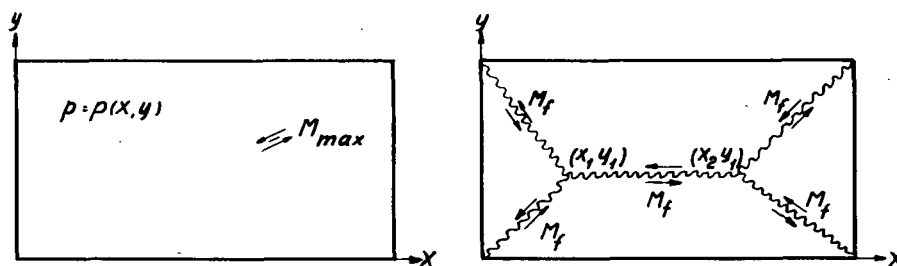


Fig. 2. Beregning af simpelt understøttet plade. Fig. 2a: Efter elasticitetsteorien. Fig. 2b: Efter plasticitetsteorien.

res. Efter plasticitetsteorien kan man for enhver mulig brudmåde, f. eks. den på fig. 1 b viste, bestemme de to ubekendte M_f og x_b ved hjælp af to momentligninger.

Tilsvarende må man ved den rektangulære plade i fig. 2 a, der er påvirket af en vilkårlig kraftfordeling og forudsat simpelt understøttet langs alle fire rande, efter elasticitetsteorien i princippet løse en differentiaalligning af fjerde orden, før maksimalmomentet M_{max} kan bestemmes. Efter plasticitetsteorien (fig. 2 b) kan man, som påvist af K. W. Johansen, bestemme de fire ubekendte x_1 , x_2 , y_1 og M_f ved hjælp af fire momentligninger.

Ganske tilsvarende forhold gælder inden for geoteknikken, bortset fra at det normalt er noget sværere at nå frem til de eksakte plasticitetsteoretiske løsninger. Her vil det totale brud normalt først være muligt, når sammenhængende områder af jordmassen er i brudtilstand (i stedet for som i de to eksempler enkelte punkter eller linier). For at finde løsningen må man i princippet løse en differentiaalligning. Den er dog her hyperbolsk og af anden orden i modsætning til elasticitetsteoriens elliptiske af fjerde orden. Det kan derfor ikke diskuteres, at det er lettere at regne på brudstadiet, men derimod nok, om det er korrekt at gøre det i det aktuelle tilfælde.

I nogle lande akcepterer man således kun beregninger af spunsvægge, hvis de er udført efter elasticitetsteorien (de må naturligvis blive meget tilnærmede). Dette kan, foruden almindelig konservatisme, skyldes en følelse af, at det er noget akademisk at se på et hypotetisk brudstadium når konstruktionen dog skal bruges i brugstilstanden.

Der er det utvivlsomt rigtige i dette argument, at selv om man ved en beregning efter plasticitetsteorien altid kan opnå en bestemt sikkerhed mod totalt brud (og fra et vist synspunkt kun på den måde), så garanterer en sådan sikkerhed ikke, at konstruktionen ikke af andre årsager har for ringe sikkerhed mod ubrugelighed i brugstilstanden. Det kan f. eks. tænkes at deformationerne som helhed eller i et enkelt, vigtigt punkt er blevet for store. Der må derfor altid foretages i det mindste en skønsmæssig vurdering af, om deformationerne (eller f. eks. korrosionsfaren) i brugstilstanden kan spille nogen rolle, og om de eventuelt er dimensionsgivende. I sidstnævnte tilfælde kan man naturligvis nøjes med at påvise sikkerheden mod brud ved en ofte meget overslagsmæssig beregning, og en nøje undersøgelse efter plasticitetsteorien vil være ret værdiløs.

Deformationsegenskaber.

Plasticitetsteorien forudsætter, at de materialer, der kommer i brud, er plastiske. D. v. s. at de, når der er kommet lokalt brud, i hvert fald tilnærmelsesvis kan

deformeres så meget, uden at brudspændingen falder væsentligt, at et totalt brud kan nå at opstå.

Herpå beror den spændingsomlejring, der er karakteristisk for plasticitetsteorien, og som bevirker, at totalt brud først opnås, når konstruktionen så sig har udtømt alle muligheder for at optage påvirkningerne.

Antages det således, at M_b er det numerisk største moment i bjælken i fig. 1 a, vil der efter plasticitetsteorien ske en flydning i dette punkt, indtil både momenterne M_1 og M_2 når op på deres flydeværdier, og først derefter er bevægelsen i den endelige brudtilstand under konstante kræfter mulig.

Sådanne flydeegenskaber kan normalt antages for en række bygningsmaterialer, f. eks. bygningstål og armeringsjern i beton (beregningemetoden med delvis indspænding er jo en plasticitetsteoretisk metode). De kan også med god tilnærmelse forudsættes i en lang række jordarter, dog med undtagelse af f. eks. meget fastlejret sand og meget sensitivt ler. For så vidt er plasticitetsteoriens anvendelse på brudproblemer i geoteknikken altså velbegrundet. Ved en række praktiske anvendelser kan man dog møde problemer som følge af forskellige deformationsegenskaber ved de indgående materialer.

Det er således uforsvarligt at regne med for stor flydning i trykstænger på grund af de medfølgende stabilitetsproblemer. Derfor vil man ikke dimensionere f. eks. byggegrubeafstivninger plasticitetsteoretisk (fig. 3).

Hvis det forudsættes, at væggene er helt stive, kunne man teoretisk forudsætte en brudtilstand, hvor de drejede sig om et punkt, f. eks. O, der kunne fastsættes vilkårligt, når blot afstivningerne I og II blev dimensioneret for de hertil svarende kræfter. Eventuelt kunne man endda indlægge et flydecharnier i væggen, f. eks. M, og nu fastlægge beliggenheden af O og det tilsvarende omdrejningspunkt for den øvre vægdel, således at konstruktionen blev økonomisk mest gunstig.

I praksis kan man ikke regne på den måde, fordi man ikke vil turde regne med den flydning af ubestemt størrelse under trykkræfterne i I og II, som er nødvendig for at opnå den påregnede bevægelse af væggen med en tilsvarende gunstig jordtryksfordeling. I stedet regnes væggen ubevægelig. Jordtrykket er et hviletryk (svarende til elasticitetsteorien), og afstivningerne må dimensioneres for de tilsvarende højere spændinger.

Noget tilsvarende gælder f. eks. ved passivt jordtryk i fastlejret sand, overlejret af dynd eller blødt ler (fig. 4). Sandets flydedeformationer er relativt små; de antages dog normalt store nok til at tillade, at den fulde brudfigur i sandet udvikler sig. Dyndets bruddeformation er imidlertid så stor, at det kan være et spørgsmål, om man får udviklet det fulde passive jordtryk her, inden sandlejringen er blevet for forstyr-

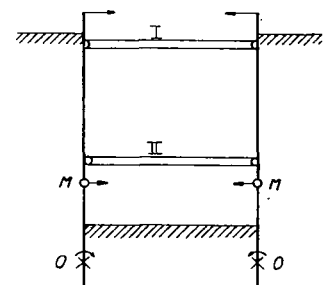


Fig. 3. Byggegrube med afstivede vægge.

ret. I sådanne tilfælde vil man derfor ofte kun regne med det passive jordtryk i sandet, hvorimod dyndet kun medregnes med hviletryk eller evt. med en vis brøkdæl af det passive tryk. Hvis væggen stod helt i dynd; ville man naturligvis regne med fuldt passivt jordtryk her; medmindre de tilsvarende deformationer var for store af hensyn til væggen.

Brudbetingelsen.

Elasticitetsteoriens sammenhæng mellem spændinger og deformationer erstattes i plasticitetsteorien af en brudbetingelse, som spændingerne skal opfylde, når der er brudtilstand. Som nævnt antages det, at deformationerne kan blive vilkårligt store, når brudbetingelsen er opfyldt.

I geoteknikken har det vist sig, at de fleste jordarter med god tilnærmelse opfylder Coulomb-Hvorslevs brudbetingelse. Den må formuleres forskelligt i korttids- og i langtidstilstanden, og forholdene kompliceres også af eventuelle porevandstryk, men i princippet lyder den som bekendt:

$$\tau_{\max} = c + \sigma \tan \varphi \quad (1)$$

for det farligst påvirkede snit gennem det betragtede punkt i jorden. τ er forskydningsspændingen på snittet og σ er normalspændingen. De to øvrige symboler er materialkonstanter, c er kohæsionen og φ er friktionsvinklen.

Bestemmelsen af c og φ er åbenbart et laboratorietechnisk problem. Når først de er bestemt, kan man i princippet bestemme brudtilstanden svarende til ethvert givet problem.

Helt så enkelt forholder det sig imidlertid ikke i praksis. Dette skyldes ikke, at resultaterne af laboratorie- eller modelforsøg afkræfter (1). Tværtimod synes en eventuel afvigelse fra (1) at være så lille, at den ikke har kunnet påvises statistisk ved nogen af de foretagne forsøgsserier.

Derimod er c og φ tilsyneladende afhængige af forsøgstypen, således at forstå, at man får forskellige værdier ved f. eks. triaksialforsøg, jordtryksforsøg, belastningsforsøg på plader og andre modelforsøg. Forskellen kan være på indtil 10° på φ . Dette kan skyldes flere forskellige årsager, og den virkelige forklaring ligger sandsynligvis i en kombination af disse.

En væsentlig årsag kan (for lerprøver) bestå i den prøveforstyrrelse, som vanskeligt kan undgås ved optagelsen og tildannelsen af laboratorieprøver til triaksialforsøg i modsætning til de mere uforstyrrede forhold in situ ved f. eks. belastningsforsøg i marken. Noget tilsvarende gælder muligvis ved de forskellige lejringsmetoder for sandprøver til forskellige formål.

Fejl af denne art kan naturligvis undgås ved en tilstrækkelig forfinet laboratorietechnik. Vanskeligere er det med de afvigelser, der skyldes, at (1) i hver enkelt anvendelse blot er et specialtilfælde af den korrekte, generelle brudbetingelse, der omhandler rumlige spændings- og deformationstilstande. Både c og φ må derfor afhænge af brudtilstandens art, og det er på ingen måde givet, at de er de samme for den triaksiale tilstand, der er karakteriseret ved at $\sigma_2 = \sigma_3$, som i f. eks. plan deformationstilstand, hvor betingelsen er at $\epsilon_2 = 0$. I det generelle rumlige tilfælde, f. eks. under et rektangulært fundament, er det teoretisk umuligt at anvende en brudbetingelse på en todimensional form, som angivet i (1). Da brudfiguren i dette til-

fælde er så kompliceret, at der endnu ikke findes blot en tilnærmelsesløsning, har man måttet betragte et mere simpelt specialtilfælde (et uendeligt langstrakt fundament d. v. s. plan deformationstilstand) og korrigere ved hjælp af de såkaldte formfaktorer. Denne korrektion kan ikke fuldstændig dække forskellen i de to tilfælde, så det kan ikke forventes, at der selv med de bedst mulige formfaktorer skal kunne regnes med de samme værdier af c og φ .

Vanskelighederne ved rent praktisk at bygge et apparat, der kan påføre en jordprøve en vilkårlig rumlig spændingstilstand, er så store, at arbejdet med at opstille det generelle brudkriterium kun er på et rent indledende stadium. Løsningen på dette problem ligger i at udføre modelforsøg af samme type og såvidt muligt på jord lejret under samme forhold, som ved det problem, styrkeparametrene skal anvendes på. Ved bearbejdelse af det indvundne erfaringsmateriale kan man endvidere nå frem til for de enkelte jordarter at regne om mellem de forskellige forsøgstyper.

Løsninger efter plasticitetsteorien.

Når først udgangsbetingelserne er fastlagt, er det en principielt enkel opgave at finde den tilsvarende løsning efter plasticitetsteorien. Man har visse grundligninger, nemlig brudbetingelsen, en deformationsbetingelse for materialet, f. eks. at det er volumenkonstant og at hovedspændings- og hoveddeformationsretningerne er sammenfaldende, samt ligevægtsligningerne, og det er herefter nærmest en opgave i anvendt matematik at angive den endelige brudtilstand og de tilsvarende brudkræfter.

I praksis er der to væsentlige problemer forbundet hermed. Det første er rent regneteknisk, idet de brudfigurer, der skal bestemmes, ofte kan være ganske komplicerede. Så længe der er tale om de såkaldte statisk bestemte brudfigurer, d. v. s. sammenhængende brudzoner, der kan beregnes ud fra grænsebetingelser, der alene vedrører spændingerne, er forholdene relativt simple, idet de kan beregnes trinvis med enhver ønsket nøjagtighed. Den på fig. 4 skitserede brudfigur for et passivt jordtryk er et eksempel herpå. Andre eksempler udgøres af tilsvarende aktive jordtryk og f. eks. Lundgren og Mortensens brudfigur for bæreevnen af et sribefundament (skitseret på fig. 5). Disse brudfigurer kan tillige beregnes for hældende jordoverflader eller vægge samt for forskellige vægruheder, og der kan også inden for visse grænser tages hensyn til uregelmæssigt formede jordoverflader (f. eks. med knækpunkter) eller kontinuert varierende overfladebelastninger. Der findes en tilnærmelsesmetode, udviklet af Brinch Hansen, som tillader nøjagtige approximationer med et mindre omfattende beregningsarbejde.

Hvis grænsebetingelser, som vedrører deformationerne, har indflydelse på brudfigurernes form, bliver forholdene betydelig mere komplicerede. De simple zonebrud kan nu ikke mere anvendes, men der må regnes på ret indviklede, sammensatte brudfigurer, hvori der indgår jordlegemer, der bevæger sig som et

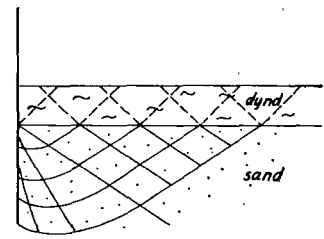


Fig. 4. Passivt jordtryk i sand, overlejret af dyndlag.

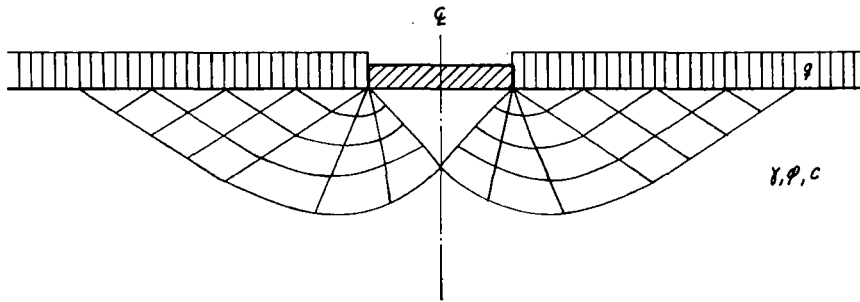


Fig. 5. Brudfigur for stribefundament på tung friktionsjord med overfladebelastning.

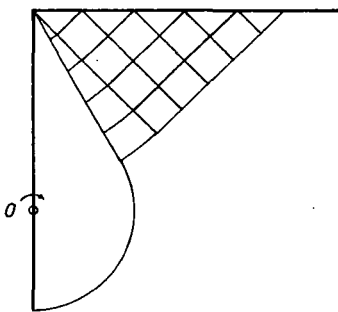


Fig. 6. Brudfigur (AaP) for væg i ler ved drejning om nederste trediedelspunkt (ru væg).

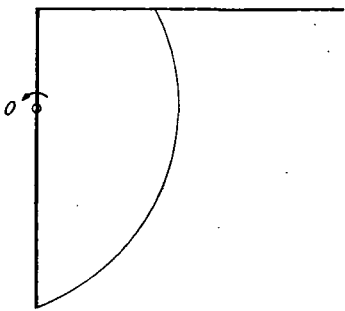


Fig. 7. Brudfigur (A) for væg i ler ved drejning om øverste trediedelspunkt (glat væg).

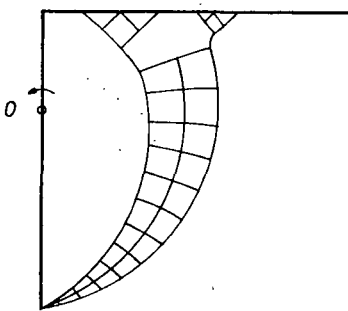


Fig. 8. Teoretisk korrekt brudfigur svarende til fig. 7 (skitseret).

ten empiriske korrektioner, rent empiriske beregningsmåder (den danske metode til beregning af spuns vægge er et eksempel herpå) eller tilnærmet elasticitetsteoretiske metoder.

En undtagelse er dog Brinch Hansens metode, der ud fra et sæt forudsætninger giver en praktisk anvendelig tilnærmelsesmetode til de korrekte brudfigurer specielt for jordtrykspåvirkede vægge. Metoden kan også anvendes på andre tilfælde, f. eks. stabilitet af fangedæmninger og blokfundamenter, men den er ikke generel, idet f. eks. nogle typer fundamenter under

stift hele adskilt af brudzoner eller liniebrud. Det bemærkes, at den korrekte brudfigur svarende til et givet brudproblem, godt kan tilhøre denne type, selv om der kan findes en plausibel statisk bestemt brudfigur. Dette vil vise sig ved, at deformationsbetingelserne ikke kan bringes til opfyldelse i denne simple brudfigur. Deformationerne undersøges kun sjældent, så mange af de kendte brudfigurer er blot tilnærmelsesløsninger, som ikke er kinematiske mulige.

Trods det, at Terzaghi ret tidligt gjorde opmærksom på, at de kinematiske betingelser kunne gøre det umuligt at anvende de simple løsninger med zonebrud (eller f. eks. Coulombs jordtryksteori, der er en simpel tilnærmelse hertil, og som kan opfattes som et specialtilfælde af Brinch Hansens tilnærmelse), er kendskabet herom dog ikke særlig udbredt, idet næsten alt arbejde indenfor plasticitetsteorien beskæftiger sig med statisk bestemte brudzoner. I praktiske beregninger, hvor resultaterne herfra erfaringsmæssigt er forkerte, benytter man en-

jordoverfladen og jordtrykspåvirkede vægge med diskontinuert varierende overfladebelastning ikke, eller i hvert fald kun meget tilnærmet, kan beregnes efter denne metode.

Ved Brinch Hansens metode anvendes brudfigurer som f. eks. skitseret på fig. 6 (et AaP-brud) og fig. 7 (et A-brud) svarende til vægge med de viste omdrejningspunkter O. Der benyttes en kombination af li-

liniebrud (defineret på en bestemt måde og med en speciel tilnærmet grænsebetingelse) og zonebrud. De betragtede brudfigurer er statisk bestemte i den forstand, at der nok anvendes de kinematiske betingelser for de stive jordlegemer, men derimod ikke for zonebruddene. Metoden kan ikke bruges uden yderligere tilnærmelser, hvis de sidstnævnte ikke er statisk bestemte (f. eks. i ZsL-brud eller i AfPfA-brud). Den giver dog ikke desto mindre gode resultater i de tilfælde, hvor den er afprøvet ved laboratorieforsøg, selv om den ikke er matematisk eksakt.

Ved jordarter med $\varphi = 0$ (f. eks. udrænet brud i ler) er det teoretisk muligt at nå frem til eksakte løsninger efter plasticitetsteorien. Med en friktionsvinkel forskellig fra nul viser der sig ved statisk ubestemte brudfigurer den vanskelighed, at løsningerne tilsyneladende ikke er entydige. Dette skyldes deformationsegenskaberne i brudtilstanden (deformationskarakteristikkerne falder ikke sammen med spændingskarakteristikkerne), og det ytrer sig ved, at brudtilstanden afhænger af spændingshistorien, d. v. s. af forspændingerne i den elastiske tilstand og af den måde, hvorpå der belastes til brud. En matematisk korrekt løsning vil derfor kræve en gennemregning af de elastisk-plastiske mellemtilstande, hvilket naturligvis komplicerer arbejdet betydeligt. Det kan dog utvivlsomt gennemføres, i hvert fald for nogle typiske eksempler for at vurdere betydningen heraf, f. eks. ved hjælp af elektronregnemaskiner, og det er også muligt ved en rent plasticitetsteoretisk beregning at angive grænser, hvor imellem den korrekte løsning må ligge.

Forøvrigt kan nogle af de plasticitetsteoretisk eksakte løsninger selv for ler formentlig også kun beregnes praktisk ved hjælp af elektronregnemaskiner. Den korrekte løsning svarende til den på fig. 7 viste er skitseret på fig. 8. Den kan endnu — omend med et meget omfattende beregningsarbejde — beregnes »i hånden«. Ved mere komplicerede brudfigurer bliver dette praktisk ugørligt, så hvis man ønsker at kende de korrekte brudfigurer, f. eks. til brug for sammenligning med laboratorieforsøg, hvor brudfiguren er observeret, må mere effektive beregningsmetoder anvendes. Til sammenligning kan det nævnes, at i ler vil brudfigurerne i fig. 7 og 8 give meget nær samme moment om O (inden for nogle få procent), hvorimod der kan være betydelig større forskel (over 10 %) på den resulterende kraft gennem O.

Litteratur.

- Brinch Hansen, J. Earth Pressure Calculation. København 1953.
 Brinch Hansen, J. og Hessner, J. Geotekniske Beregninger, København 1959.
 Johansen, K. W. Brudlinieteorier. København 1943.
 Lundgren, H. og Brinch Hansen, J. Geoteknik. København 1958.
 Lundgren, H. og Mortensen, K. Determination by the Theory of Plasticity of the Bearing Capacity of Continuous Footings on Sand. Proc. third Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., Vol. I, 1953.
 Terzaghi, K. A. Fundamental Fallacy in Earth Pressure Computations. J. Boston Soc. Civil Eng., Vol. 23, 1936.

Summary in English.

The use of the theory of plasticity in soil mechanics is more difficult than in many other fields, because the soils usually have more intricate properties than other building materials, and because the stress analysis usually is much more difficult.

This theory can only be used if:

1. The problem in question is a failure problem.
2. The materials have plastic properties at failure.
3. The pertinent constants can be determined with a reasonable accuracy.
4. It is possible to find a reasonably correct solution to the failure problem.

Failure problems are very important, because all structures must have a reasonable safety against failure. Usually it is also much easier to design for the limit load than for the service load (using in the latter case the theory of elasticity), as it is shown by the examples of a continuous beam (Fig. 1) and a rectangular, simply supported slab (Fig. 2). But if the deformations under the service load or other considerations (e.g. the corrosion risk) are of primary importance, a detailed study of the performance under the limit load may be superfluous.

If the materials are not plastic, i. e. if they cannot sustain relatively large deformations under constant failure stresses, the redistribution of stresses cannot take place, and the theory of plasticity cannot be used. Examples of this are the bracing of cuts (Fig. 3), which cannot yield plastically because of the stability problem, and some cases of stratified earth (Fig. 4), where f. inst. passive earth pressure cannot develop in a layer of soft organic silt before the structure of a dense sand layer has been disturbed.

The failure condition (1) is correct for most soils, but the constants c and φ are found different by different testing procedures on the same soil. This may be due to a disturbance of the samples used in laboratory tests. Another reason for this is that the true failure condition is three-dimensional, and it

need not correspond to the same values of c and φ in e.g. triaxial tests as in the state of plane strain. To avoid errors it may be necessary to make model tests with the same state of deformations as in the prototype.

The solutions by the theory of plasticity are relatively easy to calculate as long as the problem in question is statically determinate, which means that the figure of rupture is a zone rupture uniquely determined by boundary conditions in terms of stresses only. Examples of this are some types of earth pressure problems (Fig. 4) or bearing capacity problems (Fig. 5). However, if the boundary conditions are also concerned with deformations the rupture figure will consist of rigid bodies of earth, separated by line ruptures or rupture zones. This may also be the case, even if a plausible zone rupture can be found, but then such a zone rupture will not be kinematically possible.

The only theory published so far which takes the deformation conditions into regard is due to Brinch Hansen. It uses a combination of rupture zones and line ruptures in a special way and with approximate boundary conditions (Figs. 6 and 7). The kinematical conditions are satisfied for the rigid bodies, but the deformations in the rupture zones are not investigated. Therefore the theory is not mathematically exact, but the approximation has been found to be close enough for practical purposes in the cases where the method has been tested in the laboratory. For some problems this method fails to give a solution, however.

The mathematically correct solutions are rather complicated, even for clay (cf. Fig. 8 showing the correct solution corresponding to Fig. 7). For sand the problem is further complicated by the fact that the stress-characteristics and the strain-characteristics do not coincide, so that the state of failure depends on the stress history. Theoretically correct solutions can then only be obtained e.g. by means of electronic computers which must probably also be used for the more complicated cases in clay.